МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнева»
Институт информатики и телекоммуникаций

Кафедра информационно-управляющих систем

Отчет по лабораторной работе №1

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Тема: Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

Вариант 10

Преподаватель ___________ Кириллов К. А.

Обучающийся БИЭ21-01, _________________ Пульмановский В. И.

Красноярск 2023 г.

Общее задание

Дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$

1. Решить СЛАУ (1) методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцам.

2. Привести СЛАУ (1) к виду

$$\mathbf{u} = \mathbf{Bu} + \mathbf{F},$$

приемлемому для применения метода простой итерации, и проверить выполнение достаточного условия сходимости этого метода, т. е.

$$\|\mathbf{B}\| \leq q < 1, \tag{2}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{E} - \tau\mathbf{A}$, $\mathbf{F} = \tau\mathbf{f}$, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, значение τ выбрать таким, чтобы выполнялось неравенство (2).

Решить эту СЛАУ методом простой итерации

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$, предварительно преобразовав ее к виду, приемлемому

для применения этого метода. В качестве начального приближения выбрать $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} = (0,0,0,0)^T$.

В качестве условия остановки итерационного процесса (для достижения заданной точности ε) использовать неравенство

$$\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\| < (1-q)\varepsilon \ , \tag{3}$$

где q – константа из неравенства (2). Имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_k\| \le \frac{1}{(1-q)}\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\| \ ,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{U}$, $\mathbf{U}$ – вектор точного решения СЛАУ, $\mathbf{u}_{k+1}$ и $\mathbf{u}_k$ – векторы приближенного решения СЛАУ, полученные на $(k+1)$-й и k-й итерациях соответственно. Следовательно, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{(1-q)}\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\| < \varepsilon \ ,$$

равносильное неравенству (3), то справедливо и неравенство

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_k\| < \varepsilon \ ,$$

обеспечивающее нахождение вектора $\mathbf{u}_k$ приближенного решения СЛАУ с

заданной точностью ε.

В качестве нормы $\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|$ вектора $\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k$ взять октаэдрическую норму, определяемую равенством

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sum_{i=1}^{4} |u_i| \text{, где } \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T,$$

а в качестве нормы $\|\mathbf{B}\|$ матрицы $\mathbf{B}$ – норму, согласованную с октаэдрической нормой вектора, определяемую следующим образом:

$$\|\mathbf{B}\|_2 = \max_{1 \le j \le 4} \sum_{i=1}^{4} |b_{ij}| \text{, где } \mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^{4} .$$

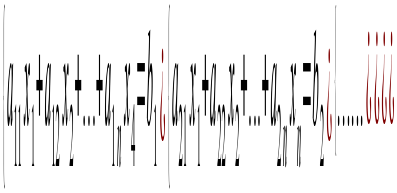
Вариант 22:

$$\begin{cases} 5{,}401 \cdot u_1 + 0{,}519 \cdot u_2 + 0{,}364 \cdot u_3 + 0{,}283 \cdot u_4 = 0{,}243, \\ 0{,}295 \cdot u_1 + 4{,}830 \cdot u_2 + 0{,}421 \cdot u_3 + 0{,}278 \cdot u_4 = 0{,}231, \\ 0{,}524 \cdot u_1 + 0{,}397 \cdot u_2 + 4{,}723 \cdot u_3 + 0{,}389 \cdot u_4 = 0{,}721, \\ 0{,}503 \cdot u_1 + 0{,}264 \cdot u_2 + 0{,}248 \cdot u_3 + 4{,}286 \cdot u_4 = 0{,}220. \end{cases}$$

Выполнение работы

1. СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцам.

Алгоритм метода Гаусса. Пусть дана система уравнений:



При решении методом Гаусса система приводится к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_4 = b_1 \\ 0x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots \\ 0x_1 + 0x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Для решения уравнения методом Гаусса необходимо знать, как выполняются элементарные преобразования систем линейных уравнений. Таких преобразований имеется четыре типа:

1. Умножение обеих частей уравнения на любое ненулевое число.
2. Перестановка уравнений системы местами.
3. Добавление (или вычитание) к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженного на любое ненулевое число.

4. Удаление нулевых строк.
Общие зависимости прямого хода для расширенной матрицы:
Ведущее уравнение не изменяется.

Для последующих уравнений $a_{i\,j}=a_{i\,j}-\frac{a_{i\,k}\cdot a_{jk}}{a_{k\,k}}$ $b_{i1}=b_{i1}-\frac{a_{ik}\cdot a_{jk}}{a_{k\,k}}$, i = k + 1,…, n; j = k + 1,..., n.

Обратный ход начинается с вычисления последнего неизвестного системы линейных уравнений и заканчивается вычислением первого неизвестного. При обратном ходе используются только строки прямого хода.

Формулы обратного хода для полученной матрицы $x_n=\frac{b_n}{a_{nn}};\quad x_i=\frac{b_i-\sum_{j=1}^{n-1} a_{i\,j}x_j}{a_{ii}},$ i = n – 1,…,1

При методе Гаусса с выбором главного элемента по столбцам производится сортировка по строкам, чтобы в ведущей строке диагональный элемент по модулю должен быть наибольшим среди ниже лежащих строк.

Текст программы Visual studio на C++:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

int main()
{
	setlocale(LC_ALL, "Russian");
	int n, i;
	double a[10][10];
	double b[10][10];
	double x[10];
	double aa, bb;
	n = 4; //Задание матрицы A и вектора b (вектор b нах-ся в элементах A[1,5..4,5])
	a[0][0] = 5.401; a[0][1] = 0.519; a[0][2] = 0.364; a[0][3] = 0.283; a[0][4] = 0.243;
	a[1][0] = 0.295; a[1][1] = 4.830; a[1][2] = 0.421; a[1][3] = 0.278; a[1][4] = 0.231;
	a[2][0] = 0.524; a[2][1] = 0.397; a[2][2] = 4.723; a[2][3] = 0.389; a[2][4] = 0.721;
	a[3][0] = 0.503; a[3][1] = 0.264; a[3][2] = 0.248; a[3][3] = 4.286; a[3][4] = 0.220;
	for (int j = 0; j < 4; j++)
		for (int k = 0; k < 5; k++)
			b[j][k] = a[j][k];
	for (int k = 0; k < n; k++) //Поиск максимального элемента в первом столбце
	{
		aa = abs(a[k][k]);
		i = k;
		for (int m = k + 1; m < n; m++)
			if (abs(a[m][k]) > aa)
			{
				i = m;
				aa = abs(a[m][k]);
			}
		if (aa < 0.000001) //проверка на нулевой(близкий к нулевому) элемент
		{
			cout << endl;
			cout << "Система не имеет решения" << endl;
```

```
			}
			if (i != k) //перестановка строк
				for (int j = k; j < n + 1; j++)
				{
					bb = a[k][j];
					a[k][j] = a[i][j];
					a[i][j] = bb;
				}
			aa = a[k][k]; //преобразование k'й строки
			a[k][k] = i;
			for (int j = k + 1; j < n + 1; j++)
				a[k][j] = a[k][j] / aa;
			for (int il = k + 1; il < n; il++) //преобразование строк
			{
				bb = a[il][k];
				a[il][k] = 0;
				if (bb != 0)
					for (int j = k + 1; j < n + 1; j++)
						a[il][j] = a[il][j] - bb * a[k][j];
			}
		}
		for (int il = n - 1; il >= 0; il--) //Нахождение решений СЛАУ
		{
			x[il] = 0;
			aa = a[il][n];
			for (int j = n - 1; j >= il + 1; j--)
				aa = aa - a[il][j] * x[j];
			x[il] = aa;
		}
		cout << "Исходная система:" << endl; //вывод матрицы b(исходной матрицы a)
		for (int il = 0; il < n; il++)
		{
			for (int jl = 0; jl < n; jl++)
				cout << b[il][jl] << " ";
			cout << " | " << b[il][n] << endl;
		}
		cout << "Решение системы:" << endl; //вывод решений
		for (int il = 0; il < n; il++)
			cout << "x[" << il << "]=" << x[il] << endl;
	}
```

Результат выполнения:

```
Исходная система:
5.401 0.519 0.364 0.283  | 0.243
0.295 4.83 0.421 0.278  | 0.231
0.524 0.397 4.723 0.389  | 0.721
0.503 0.264 0.248 4.286  | 0.22
Решение системы:
x[0]=0.0303416
x[1]=0.0312986
x[2]=0.143569
x[3]=0.0375339
```

Получено решение методом Гаусса:

$$u=\begin{pmatrix}0.03\\0.031\\0.143\\0.037\end{pmatrix}$$

2. Находим решение СЛАУ методом итераций.

Алгоритм:

Пусть дана система линейных уравнений:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=b_1;\quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=b_2;\ \dots\dots\dots$$

Приведем исходную систему к виду:

$$x_1=\frac{b_1-(a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n)}{a_{11}};\quad x_2=\frac{b_2-(a_{21}x_1+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n)}{a_{22}};\ \dots\dots\dots$$

Сама итерационная формула имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(i+1)}=\dfrac{b_1-a_{12}x_2^{(i)}-a_{13}x_3^{(i)}-\dots-a_{1n}x_n^{(i)}}{a_{11}}\\ x_2^{(i+1)}=\dfrac{b_2-a_{21}x_1^{(i)}-a_{23}x_3^{(i)}-\dots-a_{2n}x_n^{(i)}}{a_{22}}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n^{(i+1)}=\dfrac{b_n-a_{n1}x_1^{(i)}-a_{n2}x_2^{(i)}-\dots-a_{nn-1}x_n^{(i)}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Решение методом итераций будет сходиться, если любая из норм матрицы будет меньше 1:

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i\,j}| < 1$$

$$\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{i\,j}| < 1$$

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{i\,j}|^2} < 1.$$

Формула метода итераций: $X^{(k)} = B + AX^{(k-1)}$

Вычисления завершаются в случае $\varepsilon \geq \dfrac{\|C\|}{1-\|C\|} \cdot \left\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \right\|$

Где C – норма, которая использована для проверки сходимости.

Проверим выполнимость условия сходимости процесса итерации (преобладание диагональных элементов):

5,401 > 1,166=0,519+0,364+0,283;

4,830 > 0,994=0,295+0,421+0,278;

4,723 > 1,31=0,524+0,397+0,389;

4,286 > 1,015=0,503+0,264+0,248;

Условие сходимости процесса итерации выполняется.

Напишем интерполяционную формулу:

$$\begin{cases} \text{¿}\, u_1^{(n)} = \dfrac{7}{57} - \dfrac{73}{1501} \cdot u_2^{(n-1)} - \dfrac{527}{4503} \cdot u_3^{(n-1)} - \dfrac{132}{1501} \cdot u_4^{(n-1)}; \\ \text{¿}\, u_2^{(n)} = \dfrac{358}{5121} - \dfrac{259}{5121} \cdot u_1^{(n-1)} - \dfrac{47}{569} \cdot u_3^{(n-1)} - \dfrac{206}{5121} \cdot u_4^{(n-1)}; \\ \text{¿}\, u_3^{(n)} = \dfrac{565}{4317} - \dfrac{413}{4317} \cdot u_1^{(n-1)} - \dfrac{177}{1439} \cdot u_2^{(n-1)} - \dfrac{88}{1439} \cdot u_4^{(n-1)}; \\ \text{¿}\, u_4^{(n)} = \dfrac{436}{4851} - \dfrac{109}{1617} \cdot u_1^{(n-1)} - \dfrac{412}{4851} \cdot u_2^{(n-1)} - \dfrac{29}{693} \cdot u_3^{(n-1)}; \end{cases}$$

Вычислим норму матрицы (число a**):**

$$\frac{73}{1501} + \frac{527}{4503} + \frac{132}{1501} = \frac{1142}{4503} = 0{,}254;\ \frac{259}{5121} + \frac{47}{569} + \frac{206}{5121} = \frac{296}{1707} = 0{,}173;$$

$$\frac{413}{4317} + \frac{177}{1439} + \frac{88}{1439} = \frac{1208}{4317} = 0{,}280;\ \frac{109}{1617} + \frac{412}{4851} + \frac{29}{693} = \frac{109}{1617} = 0{,}194;$$

$$a = \frac{1208}{4317} = 0{,}280 < 1.$$

В качестве начального приближения положим $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0.$

Итерации продолжим до выполнения условия:

$$\max_{i=1,2,3,4} \left| x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)} \right| \leq (1-a) \cdot 0{,}000001.$$

```
#include <iostream>
#include <math.h>
```

```
using namespace std;

int main()
{
	setlocale(LC_ALL, "Russian");
	double eps, q, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, s;
	int i;
	eps = 0.000001;
	q = 3109.0 / 4317;
	x1 = 0; x2 = 0; x3 = 0; x4 = 0;
	s = 0.5; i = 0;
	while (s > eps * q)
	{
		y1 = 7.0 / 57 - 73.0 * x2 / 1501 - 527.0 * x3 / 4503 - 132.0 * x4 / 1501;
		y2 = 358.0 / 5121 - 259.0 * x1 / 5121 - 47.0 * x3 / 569 - 206.0 * x4 / 5121;
		y3 = 565.0 / 4317 - 413.0 * x1 / 4317 - 177.0 * x2 / 1439 - 88.0 * x4 / 1439;
		y4 = 436.0 / 4851 - 109.0 * x1 / 1617 - 412.0 * x2 / 4851 - 29.0 * x3 / 693;
		i = i + 1;
		s = abs(x1 - y1);
		if (s < abs(x2 - y2))
			s = abs(x2 - y2);
		else if (s < abs(x3 - y3))
			s = abs(x3 - y3);
		else if (s < abs(x4 - y4))
			s = abs(x4 - y4);
		x1 = y1; x2 = y2; x3 = y3; x4 = y4;
	}
	cout << "  x1=" << x1 << endl;
	cout << "  x2=" << x2 << endl;
	cout << "  x3=" << x3 << endl;
	cout << "  x4=" << x4 << endl;
	cout << "Число итераций=" << i << endl;
}
```

Результат выполнения:

```
  x1=0.100836
  x2=0.0527276
  x3=0.110221
  x4=0.0739905
Число итераций=10
```

$U := \mathrm{Iter}(B, F, 0) \qquad N := \mathrm{Iter}(B, F, 1) \qquad \Delta N := \mathrm{Iter}(B, F, 2)$

Таким образом, потребовалось 10 итераций.

Решение

$$u=\begin{pmatrix}0.1\\0.052\\0.110\\0.074\end{pmatrix}$$